スタディサプリ 共通テスト直前対策講座 数学ＩＡについて

この講座は，大学入学共通テストおよびセンター試験の「過去問題」を通じて，みなさんの実力をチェックし，底上げをするというコンセプトで作りました。この講座を見る頃は，おそらくほぼ全員の人が共通テストの過去問題を解いたことがあるでしょう。では，今一度，次のことを思い返してください。

・いつその過去問題を解きましたか？　まだ実力が伴っていない時期ではないですか？
・どのようなやり方で解きましたか？　今でも同じ解法を取りますか？
・解き直しをしましたか？　それぞれの大問は最後まで解き切りましたか？

１つでも「あ……」と思った人，この講座は，そんなあなたのためにあります。

あなたの「今の」実力が，大学入学共通テストがあなたに要求している資質・能力に対し，どこまで到達していて，どの部分が上回っているのか，または下回っているのか，あなたの予習と動画講義を通じてチェックすることで，あなたの実力が分野毎に整理されます。到達している，または上回っていれば，あとは演習あるのみ，そうでなければ，各分野を見直す最後のチャンスです。

直前期だからこそできる，「あなたの課題」の発見と克服。この講座に，得点アップのカギが隠されています。あなたならではのそのカギを発見してください。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　式と計算・図形と計量
第２講　関数・データの分析
第３講　場合の数と確率
第４講　整数の性質
第５講　図形の性質

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから動画講義に臨んでください。講義は予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　式と計算・図形と計量

1

〔1〕 $(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=$ **アイ** であるから，$19-5\sqrt{13}$ は正の実数である。

$19+5\sqrt{13}$ の正の平方根を α とし，$19-5\sqrt{13}$ の正の平方根を β とする。このとき

$\alpha^2+\beta^2=$ **ウエ**，　$\alpha\beta=$ **オ**

であり

$(\alpha+\beta)^2=$ **カキ**，　$(\alpha-\beta)^2=$ **クケ**

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}+\sqrt{\boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$$

$$\beta=\frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}-\sqrt{\boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$$

である。

（次ページに続く。）

〔２〕 a，b を定数とするとき，x についての不等式

$$|ax-b-7|<3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) $a=-3$，$b=-2$ とする。①を満たす整数全体の集合を P とする。この集合 P を，要素を書き並べて表すと

$$P=\{\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$ の解答の順序は問わない。

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i) $b=1$ のとき，①を満たす整数は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(ii) ①を満たす整数が全部で $\left(\boxed{\text{オ}}+1\right)$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

（次ページに続く。）

2

平面上に２点 A，B があり，AB＝8 である。直線 AB 上にない点 P をとり，△ABP をつくり，その外接円の半径を R とする。

太郎さんは，図１のように，コンピュータソフトを使って点 P をいろいろな位置にとった。

図１は，点 P をいろいろな位置にとったときの △ABP の外接円をかいたものである。

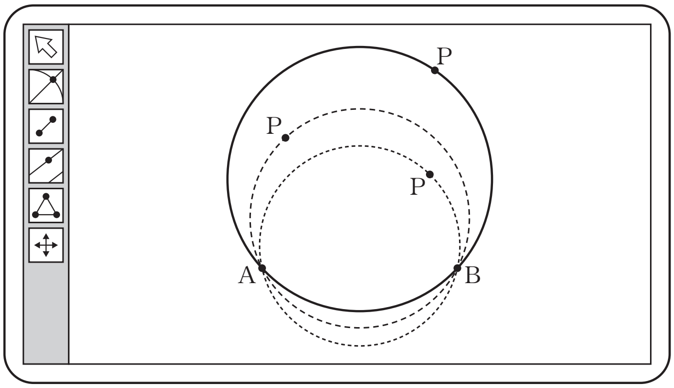


図　1

(1)　太郎さんは，点 P のとり方によって外接円の半径が異なることに気づき，次の**問題 1** を考えることにした。

> **問題 1**　点 P をいろいろな位置にとるとき，外接円の半径 R が最小となる △ABP はどのような三角形か。

正弦定理により，$2R=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sin\angle\text{APB}}$ である。よって，R が最小となるのは $\angle\text{APB}=\boxed{\text{イウ}}^\circ$ の三角形である。このとき，$R=\boxed{\text{エ}}$ である。

（次ページに続く。）

(2) 太郎さんは，図2のように，**問題1**の点Pのとり方に条件を付けて，次の**問題2**を考えた。

問題2 直線ABに平行な直線をℓとし，直線ℓ上で点Pをいろいろな位置にとる。このとき，外接円の半径Rが最小となる$\triangle$ABPはどのような三角形か。

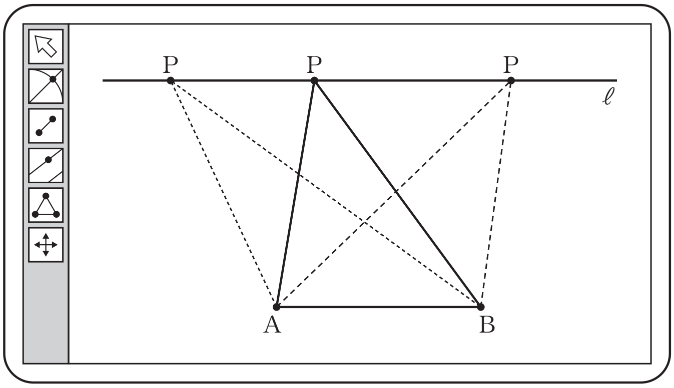


図　2

太郎さんは，この問題を解決するために，次の構想を立てた。

問題2の解決の構想

問題1の考察から，線分ABを直径とする円をCとし，円Cに着目する。直線ℓは，その位置によって，円Cと共有点をもつ場合ともたない場合があるので，それぞれの場合に分けて考える。

直線ABと直線ℓとの距離をhとする。直線ℓが円Cと共有点をもつ場合は，$h \leqq$ **オ** のときであり，共有点をもたない場合は$h >$ オ のときである。

（次ページに続く。）

(i)　$h \leqq$ オ のとき

直線 ℓ が円Cと共有点をもつので，R が最小となる △ABP は，$h <$ オ のとき **カ** であり，$h =$ オ のとき直角二等辺三角形である。

(ii)　$h >$ オ のとき

線分ABの垂直二等分線を m とし，直線 m と直線 ℓ との交点を P_1 とする。直線 ℓ 上にあり点 P_1 とは異なる点を P_2 とするとき $\sin\angle AP_1B$ と $\sin\angle AP_2B$ の大小を考える。

△ABP_2 の外接円と直線 m との共有点のうち，直線ABに関して点 P_2 と同じ側にある点を P_3 とすると，$\angle AP_3B$ **キ** $\angle AP_2B$ である。また，

$\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90°$ より $\sin\angle AP_3B$ **ク** $\sin\angle AP_1B$ である。このとき

(△ABP_1 の外接円の半径) **ケ** (△ABP_2 の外接円の半径)

であり，R が最小となる △ABP は **コ** である。

カ ， コ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　鈍角三角形　　①　直角三角形　　②　正三角形
③　二等辺三角形　　④　直角二等辺三角形

キ ～ ケ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$<$　　①　$=$　　②　$>$

（次ページに続く。）

(3)　**問題２**の考察を振り返って，$h=8$ のとき，△ABP の外接円の半径 R が最小である場合について考える。このとき，$\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，$R=\boxed{\text{ス}}$ である。

3

a を定数とする。実数 x に関する二つの条件 p，q を次のように定める。

p：$-1 \leqq x \leqq 3$

q：$|x-a|>3$

条件 p，q の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$ で表す。

(1)　命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるような a の値の範囲は

$a <$ [アイ]，　[ウ] $< a$

である。

(2)　$a =$ [ウ] のとき，$x =$ [エ] は命題「$p \Longrightarrow q$」の反例である。

（次ページに続く。）

(3)　実数 x に関する条件 r を次のように定める。

$r : 3 < x \leqq 4$

次の［オ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

$a=1$ のとき，条件「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」は条件 r であるための［オ］。

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

テキスト解答

【講義問題の略解】

※動画講義の内容を補完するものです。記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません。ご了承ください。

第１講　式と計算・図形と計量

1 [1]　$(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=19^2-(5\sqrt{13})^2=361-325=36$

$(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})>0$，$19+5\sqrt{13}>0$ より，$19-5\sqrt{13}>0$

$\alpha=+\sqrt{19+5\sqrt{13}}$，$\beta=+\sqrt{19-5\sqrt{13}}$ とすると

$$\alpha^2+\beta^2=(19+5\sqrt{13})+(19-5\sqrt{13})=38$$

$$\alpha\beta=\sqrt{19+5\sqrt{13}}\sqrt{19-5\sqrt{13}}$$

$$=\sqrt{(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})}=\sqrt{36}=6$$

であり

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=38+2\cdot6=50$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=38-2\cdot6=26$$

である。$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha>\beta$ より

$\alpha+\beta=+\sqrt{50}=5\sqrt{2}$　……①，$\alpha-\beta=+\sqrt{26}$　……②

したがって

(①＋②)÷2 より $\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}$　　(①－②)÷2 より $\beta=\dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{26}}{2}$

[2]　$|ax-b-7|<3$　……①より $-3<ax-b-7<3$

よって $b+4<ax<b+10$　……①′

(1)　$a=-3$，$b=-2$ のとき，①′ より $2<-3x<8$　　$-\dfrac{8}{3}<x<-\dfrac{2}{3}$

よって，①を満たす整数全体の集合 P は　　$P=\{-2,\ -1\}$

(2)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，①′ より $\sqrt{2}(b+4)<x<\sqrt{2}(b+10)$　……①″

$\sqrt{2}b+4\sqrt{2}<x<\sqrt{2}b+10\sqrt{2}$

(i)　$b=1$ のとき，①″ より $5\sqrt{2}<x<11\sqrt{2}$ $\iff$ $\sqrt{50}<x<\sqrt{242}$

よって，①を満たす整数 x は $x=8$，9，……，15 の $15-8+1=8$（個）

(ii)　①を満たす整数が $8+1=9$ 個であるような正の整数 b を考える。

$b=2$ のとき，①″ より $6\sqrt{2}<x<12\sqrt{2}$ $\iff$ $\sqrt{72}<x<\sqrt{288}$

よって，①を満たす整数 x は $x=9$，10，……，16 の $16-9+1=8$（個）

$b=3$ のとき，①″ より $7\sqrt{2}<x<13\sqrt{2}$ $\iff$ $\sqrt{98}<x<\sqrt{338}$

よって，①を満たす整数 x は $x=10$，11，……，18 の $18-10+1=9$（個）

よって①を満たす整数が $8+1=9$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは 3

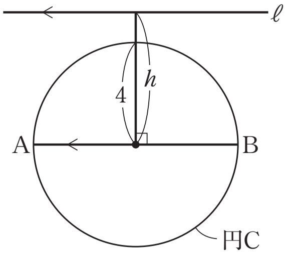
2 (1) $\triangle$ABP で正弦定理より

$$2R=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=\frac{8}{\sin\angle\mathrm{APB}}$$

よって，R が最小となるのは $\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となるときであり，
$0^\circ<\angle\mathrm{APB}<180^\circ$ より，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のときである。

このとき，$R=\dfrac{8}{2\sin 90^\circ}=4$

(2) 円 C の半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=4$ より



直線 ℓ が円 C と

共通点をもつのは　$h\leqq 4$

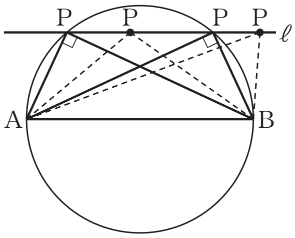
共有点をもたないのは　$h>4$

のときである。

(1)より，R が最小となるのは $\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となるときであり，
点 P が直線 ℓ 上にあるという条件のもとで $\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となるときを考える。

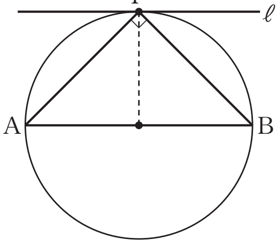
(i) $h\leqq 4$ のとき

$h<4$ のとき



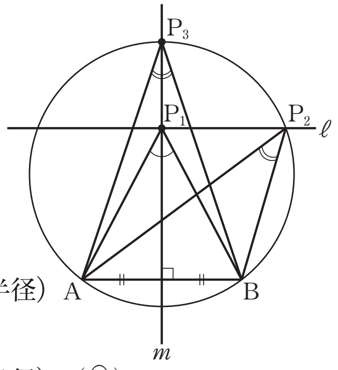
点 P が直線 ℓ と円 C の交点と一致するとき，
$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となり，$\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となる。
このとき，R が最小となる $\triangle$ABP は
直角三角形（①）

$h=4$ のとき



点 P が接線 ℓ と円 C の接点と一致するとき，
$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となり，$\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となる。
このとき，R が最小となる $\triangle$ABP は直角二等辺三角形

(ii) $h>4$ のとき



円周角の定理より，$\angle\mathrm{AP_3B}=\angle\mathrm{AP_2B}$

（①）

また，$\angle\mathrm{AP_3B}<\angle\mathrm{AP_1B}<90^\circ$ より

$\sin\angle\mathrm{AP_3B}<\sin\angle\mathrm{AP_1B}$

（⓪）

このとき

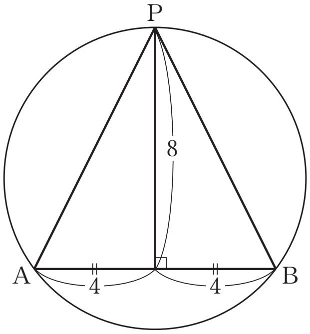
($\triangle\mathrm{ABP_1}$ の外接円の半径)＜($\triangle\mathrm{ABP_3}$ の外接円の半径)

すなわち

($\triangle\mathrm{ABP_1}$ の外接円の半径)＜($\triangle\mathrm{ABP_2}$ の外接円の半径)　（⓪）

したがって，R が最小となるのは，点 P が点 P_1 と一致するときで，
このとき △ABP は二等辺三角形　（③）

(3)　$h=8$ のとき，△ABP の外接円の半径 R が最小となるのは，点 P が(2)の点 P_1 と一致するときである。



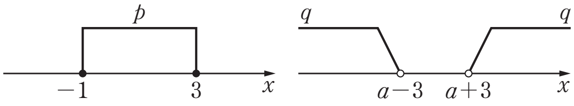
$PA=PB=4\sqrt{5}$ であることから，
△ABP の面積について

$$\frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{5})\cdot(4\sqrt{5})\cdot\sin\angle APB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8$$

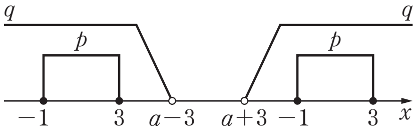
よって，$\sin\angle APB=\dfrac{4}{5}$

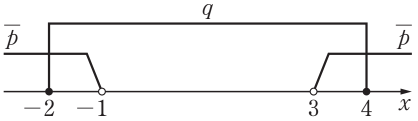
このとき，$R=\dfrac{8}{2\sin\angle APB}=\dfrac{8}{2\cdot\frac{4}{5}}=5$

3　$|x-a|>3$ より，
$x-a<-3,\ 3<x-a$
よって，$q:x<a-3,\ a+3<x$



(1)　命題「$p\Longrightarrow q$」が真であるような a の値の範囲は
$a+3<-1$　または　$3<a-3$
よって，$a<-4,\ 6<a$



(2)　$a=6$ のとき
$q:x<3,\ 9<x$
よって，$x=3$ は命題「$p\Longrightarrow q$」の反例

(3)　$p:-1\leqq x\leqq 3$ より，$\overline{p}:x<-1,\ 3<x$
$a=1$ のとき
$q:x<-2,\ 4<x$
よって　$\overline{q}:-2\leqq x\leqq 4$
よって，$\overline{p}$かつ$\overline{q}:-2\leqq x<-1,\ 3<x\leqq 4$
したがって，条件「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」は，
$r:3<x\leqq 4$ であるための必要条件であるが，十分条件ではない（⓪）